872 二次數体ニ於ケル Euclid ノ Algorithm ニ對スル覺書（第二報）*

武隈 良一（札幌）

Euclid ノ Algorithm トイフノハ御承知ノ如ク，二整數 $\alpha, \beta \neq 0$ ガ與ヘラレタトキ

$$\alpha = \beta\gamma + \delta \qquad |\delta| < |\beta| \qquad (a)$$

ヲ滿足スル整數 γ，及ビ δ ヲ求メルコトデアリマス。

今 α, β ヲ二次數体 $K(\sqrt{D})$ ノ整數ト考ヘルトキ (a) ハ次ノ如クナッテ

(*) 第一報ハ月刊數學昭和十五年四月号ニ掲載

$$|N(\alpha-\beta\gamma)|<|N(\beta)|$$

コヽデ $\dfrac{\alpha}{\beta}=\varepsilon$ トオケバ

$$|N(\varepsilon-\gamma)|<1 \tag{b}$$

トナリマス。従ツテ $K(\sqrt{D})$ ニ於ケル任意ノ整数 α, β ガ與ヘラレタトキ (b) ヲ満足スル γ ガ存在スルナラバ $K(\sqrt{D})$ ハ *Euclid Algorithm*（今後簡単ノタメニ E.A. ト書ク）ガ成立スル二次数体デアリマス。

サテ D ガ如何ナル値ヲトルトキ $K(\sqrt{D})$ ニ於テ E.A. ガ成立スルデセウカ。以下之ニ就テ今日迄ニ得ラレタ大体ノ結果ヲ記シテオカウト思ヒマス。

$D<0$ ノ場合ニツイテハ Birkhoff [1]** ガ早クカラ幾何學的解法ヲ得テ居リマスガ Dickson [2] ノ著書ニモ論ゼラレテアリマス。即チ

$$D=-1, -2, -3, -7, -11$$

ノ場合ニハ E.A. ハ成立スルト証明シテアリマス。而シテ $D<0$ ナル場合ハ之レ以上調ベル必要ハナク問題ハ $D>0$ ニ於テ複雑トナツテ居リマス。今

$$D=2, 3, 5, 6, 7, 11, 13, 17, 19, 21, 29, 33, 37, 41, 57.$$

トスルトキ此ノ場合ニ E.A. ガ成立スルコトハ多クノ人ニヨツテ証明サレテ居リマス。即チ

Dickson [2] ハ 2, 3, 5, 13

** [n] ハ後掲文献ノ番号ヲ示ス。

O. Perron [3] ハ 2, 3, 5, 6, 7, 11, 13, 17, 21, 29.

Oppenheim [4] ハ 2, 3, 5, 6, 7, 11, 13, 17, 33, 37, 41.

Remak [5] ハ 5, 13, 17, 21, 29, 33, 37, 41.

Berg [6] ハ 19.

Hofreiter [7] ハ 57.

ノ場合ヲ証明シテ居リマス。

次ニ E. A. ガ成立シナイ場合ハ如何ナルトキカト云フニ、ソレニ就テハ

Oppenheim [4] ハ 23, 31, 53.

I, Schur [4] ハ 47.

Berg [6] ハ $D \not\equiv 1 \pmod{4}$ ナル或場合.

Hofreiter [7] [8] ハ 77. $14+24n\ (n \geqq 1)$. $21+24\ (n>0)$.

ナルトキ不成立ナリト証明シテ居リマス。

以上ハ大体 1935 年迄ニ得ラレタ結果デアリマスガ其ノ後ハモツト研究ガ進ンデ居リマス。

元来 E. A. ガ成立スル二次数体ニ於テハ G. C. M. ガ定マル故 Ideal ハ Haupt Ideal トナリ数体ノ Klassenzahl ガ 1 ナル故我々ハ先ヅ Klassenzahl ガ 1 ナル如キ D 丈ヲ考ヘレバヨイコトニナル。ソレニ関シテハ次ノ定理ガアリマス。

定理. $K(\sqrt{D})$ ノ Klassenzahl ガ 1 ナル

ハ次ノ場合ニ限ル。

I. $D = p \equiv 1 \pmod{4}$

II. $D = pq \equiv 1 \pmod{4}$

但シ $p \equiv q \equiv 3 \pmod{4}$

III. $D = 2.$

又ハ $D = 2p$, 但シ $p \equiv 3 \pmod{4}$

IV. $D = p \equiv 3 \pmod{4}$

但シ, 上ニ於ケル p, q ハ2ナラザル相異ナレル正ノ素數トス。

證明. 二次數体論ニ讓ル。

斯如ク D ヲ分類シテオイテカラ H. Behrbohm ト L. Rédei 〔9〕ハ次ノ定理ヲ証明シテ居リマス.

定理.

A. $D \equiv 2 \pmod{4}$ ナルトキ E. A. ノ成立スルハ $D = 2, 6$ ノ時ニ限ル。

B. $D \equiv 3 \pmod{4}$ ナルトキ E. A. ノ成立スルハ $D = 3, 7, 11, 19$ ノ時ニ限ル。

C. $D = p \cdot q \equiv 5 \pmod{8}$ ナルトキ E. A. ハ成立シナイ。但シ $D = 3p$; $p \equiv 3 \pmod{4}$ ナラズトス。

D. $D \equiv 5 \pmod{24}$ ナルトキ E. A. ノ成立スルハ $D = 5, 29$ ノ時ニ限ル。

証明: 省ク.

以上ニヨリ問題ハ次ノ場合ダケガ殘ツテ居リマス。

I. $D = p \equiv 1,\ 13,\ 17 \pmod{24}$

II. $D = p \cdot q \equiv 1,\ 9.\ 17 \pmod{24}$

但シ $p \equiv q \equiv 3 \pmod{4}$

コノ中主トシテII ノ場合ニツイテ L. Schuster〔10〕ガ次ノ定理ヲ証明シテ居リマス。

定理

(a) $D = 24n + 1 = p \cdot q$

$$p \equiv q \equiv 7.\ 11,\ 19,\ 23\ (24)$$

(b) $D = 24n + 9 = (8n + 3) \cdot 3 = p \cdot q$

$$q = 3,\quad p \equiv 11,\ 19\ (24)$$

(c) $D = 24n + 17 = p \cdot q$

1. $p \equiv 7\ (24)$ $\qquad q \equiv 23\ (24)$
2. $p \equiv 11\ (24)$ $\qquad q \equiv 19\ (24)$

トスルトキ

(b), (c) ナル場合ニ於テ E. A. ハ成立シナイ。但シ D = 33, 57ハ省ク。又 (a) ニ於テハ次ノ時ニ限リ精々成立ス。

1. $p \equiv q \equiv 7.\ 19\ (24),\qquad q < p < \frac{4}{3} q$
2. $p \equiv q \equiv 11\ (24)$

$$q < p < \frac{3}{2}$$

又ハ $\frac{8}{3} q < p < 3q + 17 + \frac{101}{q-6}$

3. $p \equiv q \equiv 23\ (24)$

$$q < p < 3q + 17 + \frac{101}{q-6}$$

証明. 省ク。

Schuster ハコノ定理ヲ証明シタ後，次ノ結論ヲ得テ居リマス．即チ $D = p\cdot q < 10000$ ナルトキ E. A. ハ成立シナイ。但シ 21, 33, 57 ハ省クト言ッテ居リマス。

反之．I ノ場合ニツイテハ Paul Erdös ト Chao Ko [11] ガ次ノ定理ヲ証明シテ居リマス。

定理．$D = p = 13 + 24n \ (n > 1)$

$$D = p = 1 + 8n \ (n > 7)$$

ナルトキ相当大ナル p ニ対シテハ E. A. ハ成立シナイ。即チ成立スル場合ハ若シアリトシテ有限個シカナイ。

証明．省ク。

以上デ大体ノ紹介ヲ終リマスガ、夫等ニ依レバ大マカニ言ヘバ殆ンド問題ハ解決サレタト申シテ差支ヘナイデアリマセウ。残サレタ場合ハ極リ一部トイフコトガ出来マス。

文献

[1] Birkhoff. American Math. Monthly 13, (1906)

[2] Dickson. Algebren und ihre Zahlentheorie (1927) S. 151.

[3] O. Perron. Math. Ann 107 (1933) 489–495.

[4] A. Oppenheim. Math. Ann. 109 (1934)

349—352.
〔5〕 R. Remak. J. D. M. V. 44 (1934)
238—250.
〔6〕 E. Berg. Kungl. Fysiografiska
Sällskapets i Lund Förhandlingar
5 (1935) Nr. 5
〔7〕 N. Hofreiter Mh. Math. Phys. 42 (1935)
〔8〕 N. Hofreiter Math. Ann. 110 (1935)
〔9〕 H. Behrbohm und L. Rédei. Crelle
Journal 174 (1936)
〔10〕 Ludwig Schuster. Mh. Math. Phys.
47 (1938)
〔11〕 Paul Erdös and Chao Ko. The Jour
of the London Math. Soc. 13 (1938)

（以上）